

Dr Jelena M. Andrić, master inž. građ.

Aleksandar Pujović, master inž. građ.

Betonske konstrukcije 1 i 2

- Zbirka rešenih zadataka -

Beograd, 2025

Betonske konstrukcije 1 i 2 – Zbirka rešenih zadataka

Prvo izdanje

Autori: dr Jelena M. Andrić, master inž. građ.
Xi'an Jiaotong-Liverpool University u Kini

Aleksandar Pujović, master inž. građ.
Akademija strukovnih studija Zapadna Srbija u Užicu

Recezent: dr Andrija Zorić, master inž. građ.
Univerzitet u Nišu

dr Radomir Zejak, dipl. inž. građ.
Univerzitet Crne Gore u Podgorici

dr Đorđe Đuričić, dipl. inž. građ.
Akademija strukovnih studija Zapadna Srbija u Užicu

Izdavač:

AGM knjiga d.o.o.
Beograd – Zemun
www.agmknjiga.com

Glavni i odgovorni urednik:
Sarić-Ahmić Slavica

Tiraž:
300 primeraka

Štampa:
Donat Graf, Beograd

ISBN: 978–86–6048–07–4

Predgovor

Zbirka zadataka iz Betonskih konstrukcija 1 i 2 prvenstveno je namenjena studentima koji slušaju nastavu iz predmeta Betonske konstrukcije 1 i Betonske konstrukcije 2 na Akademiji strukovnih studija Zapadna Srbija – studijskog programa građevinsko inženjerstvo. Formiranje zadataka u ovoj zbirci, podrazumevalo je primenu novog važećeg standarda u projektovanju armiranobetonskih konstrukcija: SRPS EN1992-1-1: Evrokod 2 – Projektovanje betonskih konstrukcija – Deo 1-1: Opšta pravila i pravila za zgrade, koji je ispraćen odgovarajućim Nacionalnim prilogom SRPS EN 1992-1-1/NA.

Na osnovu dugogodišnjeg iskustva došlo se do zaključka da bi kvalitetnijem savladavanju gradiva doprinela jedna Zbirka zadataka iz betonskih konstrukcija 1 i 2, naročito nakon prelaska na proračun konstrukcija prema graničnim stanjima, kojima se u prethodnom periodu poklanjala skromna pažnja. U tom pravcu razmišljanja, učinjen je napor da se rešeni zadaci koji su obrađeni kroz vežbe i ispite, sastave u jednu publikaciju koja se štampa pod naslovom „Zbirka zadataka iz betonskih konstrukcija 1 i 2“. Brojni primeri su urađeni na način koji se zahteva od studenata prilikom polaganja pismenog dela ispita i šire od toga.

Sadržaj ove zbirke, pored nastavnih oblasti koje su predviđene planom i programom iz predmeta Betonske konstrukcije 1 i Betonske konstrukcije 2, čine i primeri ispitnih zadataka. Postavke zadataka su odabrane tako da pokriju sve oblasti koje su predavane na datim predmetima na drugoj godini strukovnih akademskih studija na Akademija Zapadna Srbija u Užicu.

Iako je namenjena u prvom planu studentima, Zbirka predstavlja takođe i materiju koju mogu koristiti mladi inženjeri koji se bave projektovanjem, statičkim proračunom i dimenzionisanjem betonskih konstrukcija.

Želja autora je da posle izvesnog vremena bude publikovano i drugo izdanje, koje će biti dopunjeno novim rešenim zadacima, kao i grafičkim priložima.

U Beogradu, Avgust 2025.

Sadržaj

1. Određivanje statičkih uticaja.....	9
2. Dimenzionisanje preseka na čisto savijanje.....	11
Vezano dimenzionisanje	11
Slobodno dimenzionisanje	14
3. Dimenzionisanje preseka pri složenom savijanju – veliki ekscentricitet	17
Jednostrano armiranje	17
Dvostrano armiranje.....	20
4. Dimenzionisanje preseka pri složenom savijanju – mali ekscentricitet	24
Dijagram interakcije.....	24
5. Dimenzionisanje pri centričnom pritisku	30
6. Dimenzionisanje pri centričnom zatezanju	35
7. Dimenzionisanje T-preseka.....	37
8. Dimenzionisanje preseka na smičuće sile	40
I. Dimenzionisanje poprečnog preseka na čisto savijanje:	41
II. Dimenzionisanje prema smičućim silama:.....	42
9. Dimenzionisanje grede.....	49
I. Dimenzionisanje preseka u polju na čisto savijanje:	51
II. Dimenzionisanje preseka nad osloncem B na čisto savijanje:	52
III. Dimenzionisanje prema smičućim silama nad osloncem A:.....	53
IV. Dimenzionisanje prema smičućim silama nad osloncem B -levo:	56
V. Dimenzionisanje prema smičućim silama nad osloncem B-desno:	59
10. Primeri sa ispita za predmet Betonske konstrukcije 1	62
Jun 2023	62
11. Dimenzionisanje ploče oslonjene u jednom pravcu.....	63

I. Dimenzionisanje preseka u polju.....	65
II. Dimenzionisanje preseka nad osloncima	67
III. Dimenzionisanje preseka prema transverzalnim silama	69
12. Dimenzionisanje konzolne ploče	71
I. Dimenzionisanje preseka prema momentu savijanja.....	73
II. Dimenzionisanje preseka prema transverzalnim silama.....	75
13. Dimenzionisanje krstasto-armiranih ploča.....	77
13.1. Određivanje uticaja	77
13.2. Dimenzionisanje krstasto-armirane ploče	81
I. Dimenzionisanje ploče u X-pravcu u polju:	84
II. Dimenzionisanje ploče u Y- pravcu u polju:.....	85
III. Dimenzionisanje ploče u X-pravcu nad osluncem (gornja zona):	86
IV. Dimenzionisanje ploče u Y-pravcu nad osluncem:	87
V. Dimenzionisanje ploče prema transverzalnim silama:.....	88
13.3. Dimenzionisanje krstasto – armiranih ploča prema ekstremnim uticajima 91	
I. Dimenzionisanje ploče prema ekstremnim uslovima $g < q$:.....	92
II. Dimenzionisanje ploče u X - pravcu	96
III. Dimenzionisanje ploče u Y - pravcu.....	99
IV. Dimenzionisanje ploče prema transverzalnim silama:	102
14. Dimenzionisanje polumontažnih konstrukcija.....	106
Dimenzionisanje prema momentima savijanja:	108
15. Dimenzionisanje montažnih konstrukcija.....	110
I. Statički uticaji za statički sistem proste grede	111
II. Dimenzionisanje prema momentima savijanja:.....	112
III. Dimenzionisanje prema transverzalnim silama	113
16. Dimenzionisanje stepeništa.....	116
I. Dimenzionisanje stepeništa prema momentima savijanja	119

II. Dimenzionisanje u polju (međupodest):.....	119
III. Dimenzionisanje u polju (stepenišni krak):	120
IV. Dimenzionisanje nad osloncem (stepenišni krak i međupodest):	121
17. Primeri ispita za Betonske konstrukcije II	123
Jun 2023	123
18. Prilozi.....	124
Vrste i karakteristike armaturnih šipki u ovoj zbirci:.....	124
Čvrstoće i deformacijske karakteristike betona	125
Trajnost – Klase izloženosti	125
Trajnost - Proračun nominalnog zaštitnog sloja	126
Tablice za koeficijente za proračun pravougaonih preseka opterećenih na pravo savijanje	126
Literatura:.....	127
Biografija autora	128

1. Određivanje statičkih uticaja

Primer 1: Izračunati statičke uticaje u kontinualnoj ploči na 2 polja raspona 8 m ako je debljina ploče 20 cm. Uz sopstvenu težinu od stalnog opterećenja deluje dodatno stalno opterećenje od $\Delta g = 2 \text{ kN/m}^2$, i povremeno opterećenje od $q = 3 \text{ kN/m}^2$.

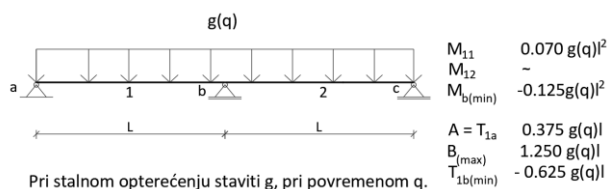
Rešenje:

$$L = 8 \text{ m}$$

$$d = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}$$

$$\Delta g = 2 \text{ kN/m}^2$$

$$q = 3 \text{ kN/m}^2$$



Slika 1. Opterećenje grede i formule za računanje uticaja

1. Analiza opterećenja

- Stalno opterećenje:
 - Sopstvene težine nosača: $\gamma * d = 25 \text{ kN/m}^3 * 0.2 \text{ m} = 5 \text{ kN/m}^2$
 - Dodatno stalno opterećenje: $\Delta g = 2 \text{ kN/m}^2$
- Ukupno:** $g = 7 \text{ kN/m}^2$
- Povremeno opterećenje: $q = 3 \text{ kN/m}^2$

1.1. Određivanje statičkih uticaja usled stalnog opterećenja:

- Na osnovu Tablica i šeme opterećenja:
 - Momenti u polju 1 i polju 2 su:

$$M_{1,g} = M_{2,g} = 0.07 * g * L^2 = 0.07 * 7 * 8^2 = 31.36 \text{ kNm/m}$$
 - Momenat nad osloncem B su:

$$M_{B,g} = -0.125 * g * L^2 = -0.125 * 7 * 8^2 = -56 \text{ kNm/m}$$
 - Reakcije nad osloncima A, B i C su:

$$A_g = 0.375 * g * L = 0.375 * 7 * 8 = 21 \text{ kN/m}$$

$$B_g = 1.25 * g * L = 1.25 * 7 * 8 = 70 \text{ kN/m}$$

$$C_g = 0.375 * g * L = 0.375 * 7 * 8 = 21 \text{ kN/m}$$

1.2. Određivanje statičkih uticaja usled povremenog opterećenja:

– Na osnovu Tablica i šeme opterećenja:

- Momenti u polju 1 i polju 2 su:

$$M_{1,q} = M_{2,q} = 0.07 * q * L^2 = 0.07 * 3 * 8^2 = 13.44 \text{ kNm/m}$$

- Momenat nad osloncem B su:

$$M_{B,q} = -0.125 * q * L^2 = -0.125 * 3 * 8^2 = -24 \text{ kNm/m}$$

- Reakcije nad osloncima A, B i C su:

$$A_q = 0.375 * q * L = 0.375 * 3 * 8 = 9 \text{ kN/m}$$

$$B_q = 1.25 * q * L = 1.25 * 3 * 8 = 30 \text{ kN/m}$$

$$C_q = 0.375 * q * L = 0.375 * 3 * 8 = 9 \text{ kN/m}$$

2. Dimenzionisanje preseka na čisto savijanje

Vezano dimenzionisanje

Primer 2: Za pravougaoni AB presek dimenzija $b/h = 40/60$ cm od klase betona C25/30 koji je izložen čistom savijanju koji zateže donju zonu preseka potrebno je odrediti količinu armature B500B prema Evrokodu 2 i nacrtati dimenzionisani presek usvojene armature. Momenat savijanja usled stalnog opterećenja je $M_G = 160$ kNm, a momenat savijanja usled povremenog opterećenja je $M_Q = 56$ kNm. Presek se nalazi u sredini klase izloženosti XC2.

Rešenje:

C25/30

B500B

$b/h = 40/60$ cm

$M_G = 160$ kNm

$M_Q = 56$ kNm

$A_{s1} = ?$

- Proračunska vrednost čvrstoće betona pri pritisku za klasu C25/30:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} * \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 * \frac{25}{1.5} = 14.2 \text{ MPa} = 1.42 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

- Proračunska vrednost granice razvlačenja armature B500B:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1.15} = 435 \text{ MPa} = 43.5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

1. Analiza uticaja na poprečni presek:

$$M_{uk} = \gamma_G * M_G + \gamma_Q * M_Q = 1.35 * 160 + 1.5 * 56$$

$$M_{uk} = 216 + 84 = 300 \text{ kNm}$$

2. Računanje položaja težišta zategnute armature:

- Proračun zaštitnog sloja: XC2

$$c_{\text{nom}} = c_{\text{min}} + \Delta c_{\text{dev}}$$

$$c_{\text{min}} = \max \{c_{\text{min,b}}; c_{\text{min,dur}}; 10 \text{ mm}\} = \max \{20 \text{ mm}; 25 \text{ mm}; 10 \text{ mm}\}$$

$$c_{\text{min}} = 25 \text{ mm}$$

$$c_{\text{nom}} = c_{\text{min}} + \Delta c_{\text{dev}} = 25 \text{ mm} + 10 \text{ mm} = 35 \text{ mm}$$

- Pretpostavljeni položaj težišta zategnute armature:

(pretpostavka $\Phi 20$)

$$d' = c_{\text{nom}} + \Phi_{\text{uz}} + \Phi/2 = 35 \text{ mm} + 8 \text{ mm} + 10 \text{ mm} = 53 \text{ mm} = 5.3 \text{ cm}$$

pretpostavka: $d_1 = 5.5 \text{ cm}$

$$d = h - d_1 = 60 \text{ cm} - 5.5 \text{ cm} = 54.5 \text{ cm}$$

3. Računanje k – koeficijenta za proračun pravougaonih preseka opterećenih na pravo savijanje:

$$k = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{uk}}{b * f_{cd}}}} = \frac{54.5}{\sqrt{\frac{300 * 100 \text{ kN cm}}{40 \text{ cm} * 1.42 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}} = \frac{54.5}{22.982} = 2.371$$

Iz Tablica usvajamo: $k = 2.357$ $\varepsilon_{S1} = 10.62 \text{ ‰}$, $\omega = 20.07 \text{ ‰}$

4. Računanje potrebne površine armature:

$\varepsilon_{S1} = 10.62 \text{ ‰} > 2.5 \text{ ‰} \rightarrow$ presek se jednostrano armira

$$A_{S1} = \omega_1 * \frac{b * d}{100} * \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = 20.07 * \frac{40 * 54.5}{100} * \frac{1.42}{43.5} = 14.28 \text{ cm}^2$$

5. Određivanje broja šipki armature:

- Pretpostavka $\Phi 20$:

$$n = \frac{14.28}{3.14} = 4.54$$

- Usvaja se armatura: **5 $\Phi 20$ (15.7 cm²)**

Kontrola minimalne armature:

$$A_{s,min} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.26 * \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} * b * d \\ 0.0013 * b * d \end{array} \right. = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.26 * \frac{2.6}{500} * 40 * 54.5 \\ 0.0013 * 40 * 54.5 \end{array} \right.$$

$$A_{s,min} = \max \left\{ \begin{array}{l} 2.95 \text{ cm}^2 \\ 2.83 \text{ cm}^2 \end{array} \right. = 2.95 \text{ cm}^2$$

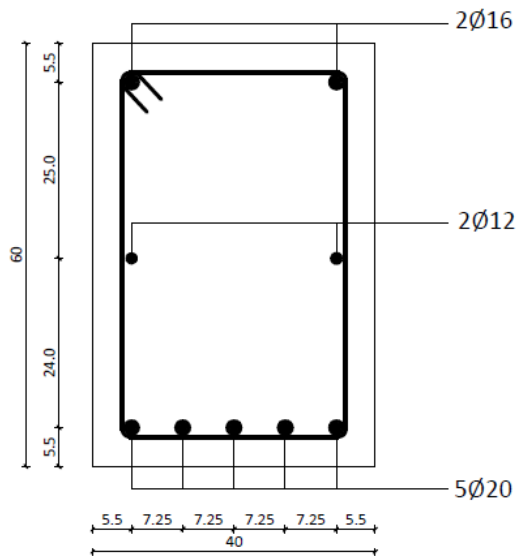
$A_{s1} = 15.7 \text{ cm}^2 > A_{s,min} = 2.95 \text{ cm}^2$ (Ispunjavaju uslov minimalne armature).

6. Provera težišta usvojene armature:

$$d' = c_{nom} + \Phi_{uz} + \Phi/2 = 35 \text{ mm} + 8 \text{ mm} + 10 \text{ mm} = 53 \text{ mm} = 5.3 \text{ cm}$$

$$d' < d_1 = 5.5 \text{ cm} \rightarrow \text{Ispunjava uslov jer je težište usvojene armature}$$

niže od pretpostavljenog težišta.



Slika 2. Poprečni presek grede sa usvojenom armaturom

Slobodno dimenzionisanje

Primer 3: Za pravougaoni AB poprečni presek grede širine $b = 25$ cm od klase betona C25/30 koji je izložen čistom savijanju i pri tome zateže donju zonu preseka, potrebno je odrediti visinu preseka, količinu armature B500B i nacrtati dimenzionisani presek. Uticaji koji deluju na presek su momenat savijanja usled stalnog opterećenja $M_G = 60$ kNm i momenat savijanja usled povremenog opterećenja $M_Q = 80$ kNm. Greda se nalazi u sredini klase izloženosti XC2.

Rešenje:

C25/30

B500B

$b = 25$ cm

$M_G = 60$ kNm

$M_Q = 80$ kNm

$h, A_{s1} = ?$

- Proračunska vrednost čvrstoće betona pri pritisku za klasu C25/30:

$$f_{cd} = \alpha_{cc} * \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 * \frac{25}{1.5} = 14.2 \text{ MPa} = 1.42 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

- Proračunska vrednost granice razvlačenja armature B500B:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1.15} = 435 \text{ MPa} = 43.5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

1. Analiza uticaja na poprečni presek:

$$\begin{aligned} M_{uk} &= \gamma_G * M_G + \gamma_Q * M_Q = 1.35 * 60 + 1.5 * 80 = 81 + 120 \\ &= 201 \text{ kNm} \end{aligned}$$

2. Usvajaju se vrednosti za ϵ_{cu2} i ϵ_{s1} :

$$\epsilon_{cu2} = 3.5 \text{ ‰}, \epsilon_{s1,lim} \leq \epsilon_{s1} \leq \epsilon_{ud}$$

$$\text{B500B} \rightarrow \epsilon_{uk} = 50 \text{ ‰}$$

$$\epsilon_{ud} = 0.9 * \epsilon_{uk} = 45 \text{ ‰}$$

Čitanje iz Tablice za vrednost $\varepsilon_{s1} = 10 \text{ ‰}$, $k = 2.311$ i $\omega_1 = 20.988\%$

3. Računanje d – statičke visine:

$$d = k * \sqrt{\frac{M_{uk}}{b * f_{cd}}} = 2.311 * \sqrt{\frac{201 * 100 \text{ kN cm}}{25 \text{ cm} * 1.42 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$
$$d = 2.311 * 23.795 = 55 \text{ cm}$$

4. Računanje potrebne površine armature:

$$A_{s1} = \omega_1 * \frac{b * d}{100} * \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = 20.988 * \frac{25 * 55}{100} * \frac{1.42}{43.5} = 9.42 \text{ cm}^2$$

5. Određivanje broja šipki armature:

- Pretpostavka $\Phi 16$:

$$n = \frac{9.42}{2.01} = 4.7$$

- Usvaja se armatura: **5 $\Phi 16$ (10.05 cm²)**

Kontrola minimalne armature:

$$A_{s,min} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.26 * \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} * b * d \\ 0.0013 * b * d \end{array} \right. = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.26 * \frac{2.6}{500} * 25 * 55 \\ 0.0013 * 25 * 55 \end{array} \right.$$
$$A_{s,min} = \max \left\{ \begin{array}{l} 1.86 \text{ cm}^2 \\ 1.79 \text{ cm}^2 \end{array} \right. = 1.86 \text{ cm}^2$$

$A_{s1} = 9.42 \text{ cm}^2 > A_{s,min} = 1.86 \text{ cm}^2$ (Ispunjavaju uslov minimalne armature)

6. Računanje položaja težišta armature:

- Proračun zaštitnog sloja: XC2

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c_{dev}$$

$$c_{min} = \max \{ c_{min,b}; c_{min,dur}; 10 \text{ mm} \}$$

$$c_{min} = \max \{ 16 \text{ mm}; 25 \text{ mm}; 10 \text{ mm} \} = 25 \text{ mm}$$

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c_{dev} = 25 \text{ mm} + 10 \text{ mm} = 35 \text{ mm}$$

- Računanje težišta armature: