

Biblioteka PRIRUČNICI

Milan Šulić

**MATEMATIKA U MALOM PRSTU**

**Drugo, dopunjeno izdanje**

*Glavni i odgovorni urednik*  
Sarić Ahmić Slavica

*Izražavam zahvalnost mome profesoru matematike, pok. **Milovanu Mladenoviću iz Grocke**, od koga sam pre 70 godina u Vlasenici naučio osnove brzog računanja.*

© Copywrite Milan Šulić, 2022  
© Copywrite AGM-knjiga-Beograd, 2022

**Milan Šulić, dipl.inž.maš.**

# **MATEMATIKA U MALOM PRSTU**

*Kratka istorija matematike  
Znameniti matematičari antike i novog doba  
Znameniti srpski matematičari  
Pribori i mašine za računanje  
Brzo, skraćeno računanje  
Važni i retki brojevi*

AGM knjiga  
Beograd, 2022

Milan Šulić  
**MATEMATIKA U MALOM PRSTU**  
**Drugo, dopunjeno izdanje**

Izdavač  
**AGM knjiga Beograd-Zemun**  
*www.agmknjiga.co.rs*  
*tel.+38165 84707725*

*Za izdavača*  
**Sarić Ahmić Slavica, direktor**

Likovno-grafička oprema i prelom  
**Studio AR...T**

**Štampa**  
Donat graf, Beograd

**Tiraž**  
300 primeraka

**ISBN 978-86-6048-038-7**

CIP - Каталогизacija у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд  
51(091)

ШУЛИЋ, Милан, 1938-

Matematika u malom prstu / Milan Šulić. - 2. dopunjeno izd. -  
Beograd : AGM knjiga, 2022 (Beograd : Donat graf). - 222 str. : ilustr.  
; 24 cm

Prethodno izd. objavila Altera. - Autorova slika. - Tiraž 300. - Beleška  
o piscu: str. 222. - Bibliografija: str. 221. - Sadržaj s nasl. str.: Kratka  
istorija matematike ; Znameniti matematičari antike i novog doba ;  
Znameniti srpski matematičari ; Pribori i mašine za računanje ; Brzo,  
skraćeno računanje ; Važni i retki brojevi.

ISBN 978-86-6048-038-7

a) Matematika -- Историја  
COBISS.SR-ID 76570377

# SADRŽAJ

<i>Umesto predgovora</i> .....	11
--------------------------------	----

## **1. Kratak istorijski pregled**

### **1.1 Predistorijski period**

1.1.1 Počeci brojanja .....	15
1.1.2 Matematičko pismo/cifre.....	16
1.1.3 Počeci matematike.....	17

### **1.2 Matematika u Mesopotamiji**

1.2.1 Istorijski razvoj.....	19
1.2.2 Matematičko pismo .....	20
1.2.3 Matematička saznanja .....	21

### **1.3 Matematika u Egiptu**

1.3.1 Istorijski razvoj.....	24
1.3.2 Matematičko pismo .....	26
1.3.3 Matematička saznanja .....	28

### **1.4 Matematika u Indiji**

1.4.1 Matematičko pismo .....	29
1.4.2 Matematička saznanja .....	30

### **1.5 Matematika u Kini**

1.5.1 Istorijski razvoj.....	33
1.5.2 Matematičko pismo .....	34
1.5.3 Matematička saznanja .....	35

### **1.6 Matematika u Staroj Grčkoj**

1.6.1 Matematičko pismo .....	37
1.6.2 Znameniti starogrčki matematičari .....	39
1.6.3 Tri klasična problema Antike .....	48
1.6.4 Grčka astronomija i tehnička dostignuća.....	48

### **1.7 Matematika u arapskim zemljama**

1.7.1 Istorijski razvoj.....	50
1.7.2 Matematičko pismo .....	51
1.7.3 Matematička saznanja .....	52

### **1.8 Matematika u Starom Rimu**

1.8.1 Istorijski razvoj.....	54
1.8.2 Matematičko pismo .....	55
1.8.3 Dostignuća Rimskog carstva .....	57

### **1.9 Matematika indijanskog plemena Maja**

1.9.1 Istorijski razvoj.....	59
------------------------------	----

1.9.2 Matematičko pismo .....	60
<b>1.10 Matematika u evropskim zemljama</b>	
1.10.1 Istorijski razvoj.....	63
1.10.2 Matematičko pismo .....	63
1.10.3 Matematička saznanja .....	63
<b>1.11 Znameniti matematičari modernog doba</b>	
<b>1.12 Matematika u Srbiji</b>	
1.11.1 Istorijski razvoj.....	80
1.11.2 Matematičko pismo .....	81
1.11.3 Vinčanska kultura .....	83
1.11.4 Matematička saznanja .....	85
<b>1.13 Znameniti srpski matematičari</b>	
 <b>2 Pribori i mašine za računanje</b>	
2.1 Računaljka/abakus.....	97
2.2 Logaritamske tablice i logaritmar/šiber.....	102
2.3 Računske mašine .....	106
2.4 Kratka istorija razvoja kompjutera .....	108
 <b>3. Brzo, skraćeno računanje</b>	
 <b>3.1 Osnovne računске operacije</b>	
3.1.1 Sabiranje i oduzimanje .....	117
3.1.2 Množenje i deljenje .....	118
3.1.3 Kombinovani račun .....	118
3.1.4 Sabiranje i oduzimanje velikih brojeva .....	119
3.1.5 Deljenje i množenje velikih brojeva.....	119
3.1.6 Mala tablica množenja.....	119
<b>3.2 Brzo, skraćeno množenje</b>	
3.2.1 Mini tablica množenja .....	121
3.2.2 Mala tablica množenja prstima.....	121
3.2.3 Velika tablica množenja .....	125
3.2.4 Množenje brojem 11.....	127
3.2.5 Množenje brojem 111.....	127
3.2.6 Množenje dvoc. brojem koji počinje brojem 1 .....	128
3.2.7 Množenje dvoc. brojeva kada je 1 na kraju .....	128
3.2.8 Množenje troc. brojeva kada je 1 na kraju.....	128
3.2.9 Množenje brojem 25.....	129
3.2.10 Množenje brojem 125.....	129
3.2.11 Množenje brojem 9.....	129
3.2.12 Množenje brojem 99.....	130
3.2.13 Množenje brojem 999.....	130
3.2.14 Množenje brojevima koji su blizu baze 10, 100.....	131
3.2.15 Kvadrati brojeva koji su blizu baze 10, 100 .....	135
3.2.16 Množenje br. istih desetica čije se jed. dopunj. do 10 .....	138
3.2.17 Množenje trocifr. br. ako se 2 zadnja br. dopunj. do 100 .....	139

3.2.18	Kvadrati brojeva čija je zadnja cifra 5 .....	140
3.2.19	Množenje br. svođenjem na razliku kvadrata .....	140
3.2.20	Kvadrati br. koji su blizu nekog okruglog broja 60, 100 .....	140
3.2.21	Kvadrati brojeva od 26 do 200 .....	141
3.2.22	Kvadrati susednih brojeva .....	142
3.2.23	Unakrsno množenje .....	142
3.2.24	Množenje brojem 5, 10, 15 itd.....	145
3.2.25	Množenje činiocima .....	145
3.2.26	Geometrijsko množenje.....	146
<b>3.3</b>	<b>Brzo, skraćeno deljenje</b>	
3.3.1	Deljenje brojem 2,5 ili 25 .....	148
3.3.2	Deljenje brojem 12,5 ili 125 .....	148
3.3.3	Deljenje brojem 5 ili 50.....	149
3.3.4	Deljenje brojem 4 ili 40.....	149
3.3.5	Deljenje rastavljanjem na činioce.....	149
3.3.6	Deljenje brojem 11 .....	149
3.3.7	Deljenje brojem 9 .....	150
3.3.8	Deljenje brojem 99 .....	151
3.3.9	Delilac u blizini eksponenta broja 10, klasična metoda.....	151
3.3.10	Stari indijski način kada je delilac blizu baze 10.....	152
3.3.11	Stari indijski način kada je delilac blizu baze 100.....	154
3.3.12	Delilac u blizini bilo kog okruglog broja.....	155
3.3.13	Stari indijski način deljenja bilo kojim dvocifr. brojem .....	156
3.3.14	Stari indijski način deljenja bilo kojim trocifr. brojem.....	157
3.3.15	Pretvaranje običnog u decimalni razlomak.....	158
3.3.16	Stari indijski način kada se imenilac zavr. 9.....	161
3.3.17	Pretvaranje decimalnog razlomka u obične.....	162
3.3.18	Deljivost brojeva .....	163
3.3.19	Najmanji zajednički sadržilac.....	165
<b>3.4</b>	<b>Brzo, skraćeno oduzimanje</b>	
3.4.1	Oduzimanje zaokruživanjem brojeva .....	166
3.4.2	Oduzimanje od baze 100, 1000 .....	166
3.4.3	Kombinovano oduzimanje.....	166
<b>3.5</b>	<b>Brzo, skraćeno sabiranje</b> .....	168
<b>3.6</b>	<b>Vađenje trećeg korena</b>	
3.6.1	Brzo vađenje trećeg korena .....	169
3.6.2	Postepeno vađenje trećeg korena.....	170
<b>3.7</b>	<b>Vađenje drugog korena</b>	
3.7.1	Brzo vađenje drugog korena.....	173
3.7.2	Postepeno vađenje drugog korena .....	174
3.7.3	Drugi koren po matematici Veda.....	175
3.7.4	Konusni preseci .....	177

## **4. Važni i retki brojevi**

### **4.1 Brojevi u matematici**

4.1.1	Brojevnii sistemi.....	193
-------	------------------------	-----

4.1.2	Veće i manje veličine .....	181
4.1.3	Eksponenti broja 10-veliki brojevi .....	184
<b>4.2</b>	<b>Brojevi oko nas</b>	
4.2.1	Važniji kalendari, osobine i praznici .....	188
4.2.2	Pregled datuma Pashe, Uskrsa i Vaskrsa.....	197
4.2.3	Trajni kalendar .....	198
4.2.4	Zlatni presek.....	201
4.2.5	Neobični/retki brojevi.....	205
<b>4.3</b>	<b>Igre brojevima</b>	
4.3.1	Pogađanje zamišljenog broja.....	210
4.3.2	Razlika i zbir daju 1089.....	210
4.3.3	Brojevni (magični) kvadrati .....	211
4.3.4	Sudoku.....	213
4.3.5	Problemi za razmišljanje .....	215
4.3.6	Rešenja roblema za razmišljanje .....	217
	<i>Literatura</i> .....	221
	<i>Beleška o piscu</i> .....	222

## *Umesto predgovora*

Sklonosti ljudi su različite! Pored urođene sklonosti-talenta, presudan uticaj na izbor nastavnog predmeta koga će učenik više ili manje voleti zavisi i od toga kako će mu se određeno gradivo izložiti, koliko mu metod izlaganja odgovara, pa i sama ličnost nastavnika...

Upoznajmo bar osnovna društveno-istorijska kretanja, početke i istorijski razvoj matematike, kako bismo je bolje razumeli i malo više zavoleli. Upoznajmo njenu lakoću i lepotu, makar u nekim osnovnim operacijama kao što su množenje i deljenje. Uz malo dobre volje i malo više vežbanja svako će već posle nekoliko dana znati ne samo veliku tablicu množenja (do 20x20) nego će za dve-tri sekunde bez olovke i papira (u glavi) moći pomnožiti bilo koja dva dvocifrena broja! A ako je množenik ili množilac jedan od „specijalnih” brojeva (11, 25, 125, 99, 999...), a ima ih mnogo, onda s lakoćom množimo i višecifrene brojeve.

Znati računati (množiti, deliti...), pa ma kako brzo i sigurno, ne znači biti dobar matematičar. Ali, baviti se ovom veštinom, ili u slučaju potrebe i nedostatka računara, ili samo kao igrom radi rekreacije, znači mnogo za mentalni razvoj, naročito mladih. Brojna ukrštenica – sudoku, koja sve više osvaja svet, ima samo funkciju zabave i mentalnog treninga. Brzo računanje i na tom polju daje veći efekat, a često može biti i od velike koristi, naročito ako nam nije pri ruci računar ili mobilni telefon.

Još je rimski učitelj retorike iz 1. veka n.e. Kvintilijan rekao:

„Matematika razvija pokretljivost duha, oštrinu razuma i brzo shvatanje.“

A veliki francuski matematičar s početka 17. veka kaže:

„Matematika kao nauka je toliko ozbiljna, da se ne sme propustiti nijedna prilika da se ova oblast učini zabavnijom.“

Matematika se smatra kraljicom među naukama. Ona se može proučavati sama za sebe, a mnoge druge nauke ne mogu ni časa bez matematike. Bez nje ne bi bilo ni jedne inženjerske struke, ne bismo znali da merimo vreme, ne bi bilo egipatskih piramida, naših fabrika, mostova, aviona, raketa, bankarskih računa, ne bi bilo ni kompjutera ni mobilnih telefona!

Najvažnija dopuna u ovom drugom izdanju je objašnjenje mogućnosti kako se pored male tablice množenja i velika tablica (do 20x20) pa i svaki drugi broj uz malo truda može pomnožiti pomoću prstiju obe ruke.

Nisam matematičar. Ipak, matematika me pratila celi život. Za vreme školovanja kao najdraži predmet, a kroz inženjerski posao kao neophodan „alat”. Nadam se da će bar jedno od predstavljenih poglavlja zainteresovati svakog čitaoca kome ova knjižica dođe do ruke.

Unapred se zahvaljujem svima koji mi ukažu na eventualne propuste (milansulic@yahoo.de).

Požarevac, avgusta 2022.

*Milan Šulić*



# **1. KRATAK ISTORIJSKI PREGLED**

## ***1.1 Predistorijski period***

### ***1.1.1 Počeci brojanja***

Medju prva čovekova saznanja ubrajaju se i osnovne računске operacije. Onog momenta kada su podelili ulovljenu divljač ili nabrane plodove na dva dela, najverovatnije po sistemu „jedan (komad/plod) meni-jedan tebi“, nesvesno su došli do prvog razlomka: jedne polovine nečega. Potreba da se iskaže neki broj mogla je nastati, npr. kada je jedan lovac pokazujući dva prsta i velike uši saopštavao saplemenicima da je video dva zeca, ili kada su sedeći pored logorske vatre shvatili da još trojica od njih nemaju plod koji su ostali već jeli i kada je jedan od njih pokazujući tri prsta naredjivao nekom mladjem da donese još tri ploda. Ovo sa prstima nam je ostalo do današnjeg dana. Ko od nas nije doživeo da nabrajajući nešto prstima jedne ruke ne počne da savija (ili ispravlja) prste druge ruke! I zar skoro svako dete od tri ili četiri godine na pitanje koliko ima godina ne podigne svoja tri ili četiri prstića?



Vučje kosti sa urezanim brojevima  
F. Klix: Erwachenes Denken, str. 191

Nađene su kosti vučjih nogu stare 25 do 30 hiljada godina sa urezanim crticama. U današnjoj igri tablića na 4 paralelne crtice stavljamo petu preko njih i tako pravimo grupu od 5 radi lakšeg brojanja. Tako je i na ovim kostima grupisano po pet crtica. Možda zbog pet prstiju na jednoj ruci!

Pojava trgovine i robne razmene među ljudima doprinela je bržem razvoju brojanja i računanja.

Ima mnogo dokaza da su se ljudi već hiljadama godina bavili istinskim proučavanjem i matematike. Postoje svedočenja kroz arheološka nalazišta da su se još pre četiri hiljade godina Kinezi, Vavilonci, Indijci i Egipćani uspešno bavili rešavanjem ozbiljnih matematičkih problema.

Najstarija sačuvana matematička „knjiga“ je egipatska knjiga Amosa ili Amozesa koja potiče oko 1850. godine pre nove ere, znači stara preko 3850 godina! To je tzv. Papirus-Rajnd (Rhind), u kome je dat proračun površine ostave za voće kružnog oblika, proračun površine zemljišnih parcela i neke operacije s razlomcima. Ali, u svim slučajevima daje se samo konkretno rešenje, bez pravila koja se mogu primeniti i na druge zadatke.

U starom Vavilonu su se pre više od tri hiljade godina sa uspehom bavili posmatranjem nebeskih tela. Iz tog vremena potiče i heksagesimalni sistem (osnova 60) u merenju vremena (sat ima 60 minuta, a minut 60 sekundi), kao i u merenju uglova gde se jedan stepen deli, takodje, na 60 minuta, a ovaj na 60 sekundi.

### ***1.1.2 Matematičko pismo/cifre***

Iako su na primeru životinja ili plodova shvatali brojne vrednosti, ljudi dugo nisu rečima iskazivali brojeve. Da bi saopštili nekome koliko imaju ovaca ili konja, vadili su iz džepa ili torbe kamenčiće ili neke tvrde plodove (lešnike, orahe, bobice) i pokazivali, recimo 12 kamenčića za 12 ovaca, tj. poređenjem prikazivali neko brojno stanje. Na teritoriji današnjeg Iraka (Mesopotamija) nađeno je hiljadu kuglica starih devet hiljada godina koje su stavljane u sanduke s robom, da bi se poređenjem utvrdilo da li je roba kompletno isporučena.

Prikazivanje brojnog stanja poređenjem u nekim situacijama praktikujemo i mi danas. Na primer, očekujemo goste. Znamo koliko nas je ukupno. Postavljamo tanjire prema tome broju (6, 8...), a zatim noževe, kašike, viljuške, čaše...Ništa više ne brojimo. Samo postavljamo pored svakog tanjira - iskazujemo brojno stanje poređenjem!

Umesto zapisivanja brojeva vremenom se počelo za svaku jedinicu (kravu, ovcu, dan...) upisivati na zemlji, drvetu ili kamenu po jedna crtica. Nekoliko vekova unazad brojevi/cifre „upisivani“ su urezivanjem zareza u štap ili dasku, tzv. **rafoš**, ili vezivanjem čvorova na kanapu, a kasnije ređanjem kuglica na šipke, tzv. **abakus**, što se zadržalo do danas u vidu **računaljke** za decu. Stvaranje matematičkog pisma do današnjih tzv. arapskih cifara (tačnije indijsko-

arapskih cifara) kojim se i mi koristimo, bio je dug i vremešan put koliko i sama matematika.

### ***1.1.3 Počeci matematike***

Centralna Afrika smatra se kolevkom čovečanstva. Odatle se čovečanstvo širilo, prvo prema severnoj Africi, pa prema Aziji i Evropi.

Pre dvadesetak hiljada godina Azija i Amerika bile su povezane preko Aljaske (danas Beringov Moreuz), pa tim putem dolazi do naseljavanja Amerike. U to vreme Australija je bila znatno bliža Aziji, pa se preko ostrvlja Polinezije moglo stići i primitivnim plovilima.

Pre 15.000 do 10.000 godina u nekoliko klimatski vrlo pogodnih oblasti (relativno blaga klima, obradive zemlje i vode u izobilju) nastale su prve razvijene kulture čovečanstva.

To su oblasti slivova četiri velike reke:

Nil u Egiptu, Eufkrat i Tigris u Mesopotamiji (Međurječju), današnji Irak, Ind u današnjem Pakistanu i Jangcekjang u Kini.



*Kolevka svetske kulture*

Ove četiri oblasti smatraju se kolevkom kulture i nauke, pa i matematike. Njima će, verovatno, nekada biti dodat i donji tok reke Dunava (Lepenski Vir i Vinčanska kultura)!

Isušivanjem močvara, krčenjem šipražja, kopanjem kanala za navodnjavanje... stvorilo se ne samo obradivo plodno zemljište, gde su ljudi mogli da se nastane, nego se ukazala i potreba za organizovanom upravom koja će rukovoditi radovima, isplaćivati dnevnice, deliti nastalu obradivu zemlju ili zajedničke plodove, raspisivati i ubirati poreze za javne radove: puteve, kanale... Tako je čovek bio prisiljen da računa!

Uporedo sa prvim računskim operacijama javlja se potreba i za razvojem geometrije: merenje parcela, kopanje kanala, izgradnja bogomolja, piramida, utvrđenja... Tako su nastali i prvi proračuni površina geometrijskih slika, pravo-

ugaonika, trougla, počelo je izračunavanje zapremine kvadra, piramide, te mere-nje i računanje uglova...



Figura iz Vinče

Zbog bavljenja zemljoradnjom moralo se znati kada nastupa koje godišnje doba, kada plave reke, kada treba sejati... Tako nastaju prva astronomska posmatranja i prvi kalendari.

Pored ovih opštih napomena, osvrnućemo se i pojedinačno na drevne civilizacije i na njihova dostignuća u matematici.

## ***1.2 Matematika u Mesopotamiji***

### ***1.2.1. Istorijski razvoj***

Mesopotamija ili Međurečje, sliv reka Eufrata i Tigra jedna je od najstarijih čovekovih životnih sredina. Najstarije iskopine neolitskih naseobina potiču od oko devet hiljada godina pre nove ere. Nađeni su ostaci kanala za navodnjavanje i isušivanje zemljišta iz 5.000. godie p.n.e.

Na osnovu arheoloških iskopina znamo da je u toj oblasti još pre više od pet hiljada i petstotina godina (3.500. god. pre nove ere) bila visoko razvijena sumerska kultura. Sumeri su pravili gradove, kanale za navodnjavanje, razvili sistem računanja na osnovu tzv. seksagesimalnog sistema (osnova broj 60, kao što je kod nas danas osnova broj 10 ili decimalni sistem). Seksagesimalni sistem zadržao se do današnjih dana u merenju vremena i uglova (60 minuta, 60 sekundi). Njihovo prvo pismo bilo je na bazi hijeroglifa, slikovno pismo.

Oko 2.300. godine p.n.e. Sumeri su poraženi i pokoreni od manje razvijenih Akadija. Spajanjem ovih dveju različitih kultura u naredna dva veka dolazi do usporavanja celokupnog razvoja. Ipak, u tom periodu napravljena je prva računaljka, abakus, slična današnjim dečijim igračkama, pomoću koje su se mogle izvoditi osnovne matematičke operacije. Abakus se uz dalje usavršavanje primenjuje i kod drugih naroda, pa tako i u Evropi sve do kasnog srednjeg veka. U nekim krajevima Rusije i Kine primenjuje se i danas.

Sumeri se pobunom oslobađaju Akadija oko 2.100. godine p.n.e. da bi samo sto godina kasnije bili napadnuti od Vavilonaca (semitska plemena) koji ih pokoravaju, stvaraju svoje carstvo i oko 1.900. godine p.n.e. podižu veliki glavni grad Vavilon (Babilon), danas ruševina u srednjem Iraku.

Vavilonci preuzimaju sumersku kulturu zajedno sa njihovim klinastim pismom koje je u međuvremenu nadvladalo hijeroglife. Klinasto pismo bilo je vrlo podesno da se štapićima raznog oblika na mekim glinenim pločicama utiskuju znaci (slova i brojevi). Pločice su sušene na suncu, neke od posebne važnosti i pečene, tako su do danas sačuvane čitave „biblioteke” raznih, pa i matematičkih zapisa. Kao plodna i bogata oblast Mesopotamija je često menjala gospodare: Asirci 1200. godine p.n.e., Persijanci 539, Grci na čelu s Aleksandrom Velikim 330. i na kraju Seldžuci 323. godine p.n.e. Seldžuci su turska plemena koja prodiru iz Azije. Njihovim dolaskom nastaje zastoj u kulturno-naučnom razvoju tog kraja.



P. Brigel, 1563. god. Vavilonska kula (Bečki muzej-KHM, Wien)

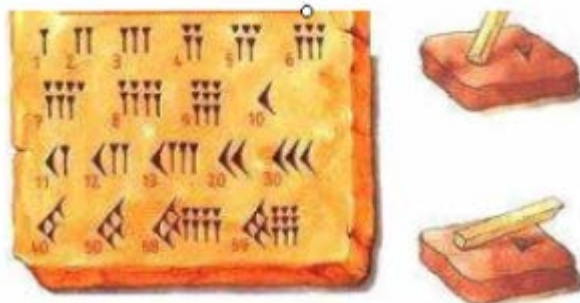
### 1.2.2. Matematičko pismo

Za usvajanje seksagesimalnog sistema kod Vavilonaca (baza 60) bile su, najverovatnije, odlučujuće mere za težinu ili dužinu. Možda je na upotrebu baze 60 uticala i činjenica da je ovaj broj deljiv sa mnogim brojevima: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 i 30.

Tuce ili duce (12 komada nečega) čuje se u mnogim krajevima i danas. A to je bila i podjedinica (niža jedinica) i u vavilonskom sistemu. Broj 12 kao osnova zadržao se i u drugim krajevima.

U Velikoj Britaniji, recimo, 1 stopa ima 12 palčeva, 1 šiling 12 penija...

Broj meseci u godini (12), 12 znakova zodijaka potiče, takođe, od Vavilonaca.



Glinena pločoca sa brojevima i štapićima za pisanje  
iz članka Ch. Erath: Babylonische Mathematik

U našem decimalnom sistemu (baza 10) imamo 9 brojeva i nulu, a Vavilonci su imali samo 2 broja: „klin”  $\nabla$  je označavao broj 1, a „kuka”  $\triangleleft$  broj 10. Ove znake bilo je lako utiskivati u mekanu glinu štapićima posebnog oblika.

$$2 = \nabla\nabla$$

$$5 = \nabla\nabla\nabla$$

$$12 = \triangleleft\nabla\nabla$$

$$55 = \triangleleft\triangleleft\triangleleft\nabla\nabla\nabla$$

Brojevi od 1 do 59 pisani su grupisanjem brojeva 1 i 10 do određene veličine. Za veće brojeve koristili su sistem vrednosti položaja kao i mi danas. Zdesna ulevo idu kod nas jedinice ( $10^0=1$ ), desetice ( $10^1=10$ ), stotice ( $10^2=100$ )..., a kod Vavilonaca jedinice ( $60^0=1$ ), šezdesetice ( $60^1=60$ ), trihiljadešeststotice ( $60^2=3600$ )...

Brojevi koji su pripadali istoj grupi pisani su tako da se dodiruju, ali se u većini slučajeva, samo po smislu u zavisnosti od svrhe broja, moglo zaključiti koji je to broj.

Ako bi prvi red dole stajao bez ikakvog dopunskog objašnjenja, mogao bi se tumačiti i kao  $1 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60^1 = 3720$  umesto prikazanih 62.

Ako je znak za jedinicu ispred znaka za deseticu, onda je to bio sigurno veći broj.

$$62 = \nabla \nabla\nabla = 1 \cdot 60^1 + 2 \cdot 60^0$$

$$125 = \nabla\nabla \nabla\nabla = 2 \cdot 60^1 + 5 \cdot 60^0$$

$$775 = \triangleleft\nabla\nabla \triangleleft\triangleleft\triangleleft\nabla\nabla\nabla = 12 \cdot 60^1 + 55 \cdot 60^0$$

Ako neko mesto nije imalo broja, ostavljena je praznina-razmak između susednih znakova. Pošto taj razmak nije bio uvek jasno izražen, počeli su još u 6. veku p.n.e. da upotrebljavaju znak (sličan našem apostrofu) za prazno mesto. Taj znak se danas smatra prvom nulom u pisanju brojeva.

### 1.2.3 Matematička saznanja

Vavilonci su poznavali četiri osnovne računске operacije. Za množenje umesto naše tablice množenja od  $1 \cdot 1$  do  $10 \cdot 10$  morali su znati do  $60 \cdot 60$ ! Kao olakšicu pri računanju upotrebljavali su tabele sa izračunatim vrednostima.

Umesto deljenja izvodili su množenje sa recipročnim vrednostima delioca  $a:b = a \cdot 1/b$ , pa su i za tu svrhu imali tabele s recipročnim



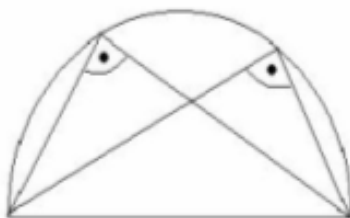
vrednostima brojeva. U tabelama su bili dati i kvadrati i kubovi, kao i kvadratni i kubni koreni mnogih brojeva.

Rešavali su linearne jednačine sa jednom i dve nepoznate. Znali su i pozitivna rešenja kvadratnih i nekih kubnih jednačina. Računali su s razlomcima. Znali su izračunati ne samo površinu kruga nego i njegovih delova odsečka i isečka, kao i površine trougla, pravougaonika, trapeza. Računali su i zapremine različitih geometrijskih tela. Za određivanje stranica obale kanala upotrebljavali su kotangens ugla (ctg).

Za vrednost broja  $\Pi$  (pi) najčešće su upotrebljavali vrednost 3, ali nađene su i glinene pločice na kojima stoji vrednost broja pi

$$\Pi = 3 + 1/8 = 3.125.$$

Mnogo vekova pre Talesa znali su Talesovu teoremu: da je periferni ugao nad prečnikom nekog kruga prav ugao ( $90^\circ$ ).



Periferni ugao nad prečnikom je prav ugao ( $90^\circ$ )

Hiljadu godina pre Pitagore koristili su za izračunavanje pravouglog trougla obrazac  $a^2 + b^2 = c^2$  (danas poznat kao Pitagorina teorema: zbir kvadrata nad obe katete jednak je kvadratu nad hipotenuzom). Znali su i za brojeve koji zadovoljavaju Pitagorinu teoremu, tzv. Pitagorin tripel, i to među velikim brojevima, npr.: 3367, 3456 i 4825. Izračunali su drugi koren iz 2 tačno na 5 decimala:  $\sqrt{2} = 1,41421296297$ , a tačna vrednost je 1,41421356237, tj. greška je manja od sedam desetomilionitih delova!

U Americi se čuva pločica br. YBC 7289 (na slici) na kojoj je računata dijagonala kvadrata stranice  $a=30$ .

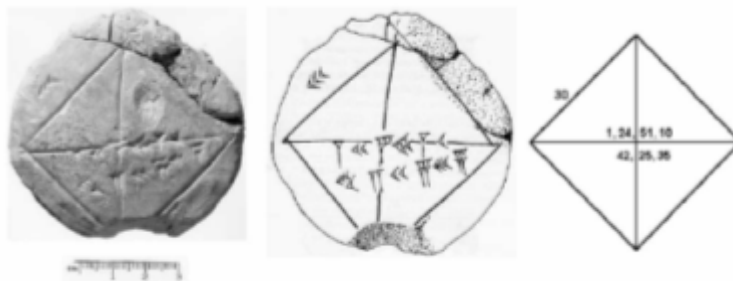
Date vrednosti su  $x=1, 24, 51, 10$  i

$y=42, 25, 35$ , gde je  $x$  vrednost za  $\sqrt{2}$ , a  $y$  dijagonala  $d=a \cdot \sqrt{2}$ .

Ako izračunamo vrednost u decimalnom sistemu, dobićemo:

$$x = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1 + 0.4 + 0.014166 + 0.0000463$$

$$x = 1.4142129 = \sqrt{2}.$$



Glinena pločica YBC 7289, muzej New Hawen, SAD

Vavilonci su matematiku koristili za praktične potrebe: proračun površine zemljišta, zapremine iskopane zemlje za kanale, broj radnika i dnevnicu za određeni posao, poreze... Primenjivali su i kamatni račun.

Nisu se bavili dokazivanjem obrazaca i definisanjem zakona matematike.

Vavilonci su prvi počeli s astronomskim posmatranjima, utvrdili su mesec od 30 dana (vreme između dva puna meseca), a dvanaest takvih meseci nazvali godinom. Ta godina imala je  $12 \cdot 30 = 360$  dana. Kasnije su utvrdili da godina traje 365 dana i 6 sati, pa su svoj kalendar ispravili dodajući posle 120 godina još jedan mesec od 30 dana. Dan su pomoću peščanog sata podelili na 24 sata, uveli minute i sekunde (jedan sat = 60 minuta; jedan minut = 60 sekundi), odredili su da pun krug ima 360 stepeni, a svaki stepen kao i sat ima 60 minuta, odnosno svaki minut 60 sekundi. Te ostatke seksagesimalnog sistema starih Vavilonaca koristimo i danas. Vavilonci su utvrdili 12 sazvežđa (znakove zodijaka) i dali im imena.

## ***1.3 Matematika u Egiptu***

### ***1.3.1 Istorijski razvoj***

Jedna od najstarijih i najmoćnijih starih kultura razvila se u plodnoj ravnici reke Nila, u današnjem Egiptu.

U vreme Starog carstva, od 2700. do 2200. godine p.n.e., nastaju utvrđeni gradovi Memfis (glavni grad) i Palestina. Grade se veliki hramovi, grobovi vladara i piramide. Iako je u to vreme postojalo pismo (hijeroglifi), nisu sačuvani ili nisu nađeni nikakvi matematički dokumenti. Staro carstvo se raspalo zbog jačanja moći pojedinih feudalaca u odnosu na moć faraona.

U periodu Srednjeg carstva oko 2100. do 1700. godine p.n.e. raste uticaj egipatske kulture i na okolne oblasti, čak do grčkog kopna. Iz tog perioda potiču i matematički papirusi. Slabi vladari 13. dinastije doprineli su ponovnom raspadu carstva i pokoravanju nekih oblasti od susednih naroda.

Novo carstvo u 16. veku p.n.e. donosi najveći vojni i privredni uspon Egipta. Ne samo u glavnom gradu Tebi nego i u celom Egiptu podižu se veličanstveni hramovi i obelisci u slavu bogova i faraona.



Egipatske piramide u Gizi

Kad pogledamo velike piramide, građene pre skoro 5.000 godina, mora nam biti jasno da je ta civilizacija posedovala ogromno matematičko znanje. Prvu poznatu piramidu projektovao je i napravio arhitekta Imhotep za faraona Zosera. Imhotep se smatra duhovnim ocem reda slobodnih zidara, masona. Najveća, danas poznata Keopsova piramida sagrađena je oko 2.570. godine p.n.e. Ona je u osnovi kvadrat stranice 230 m, a bila je visoka preko 146 m. Današnja visina od 146 m je bez oplata od poliranog krečnjaka koja je u međuvremenu pokradena za gradnju drugih objekata. Za gradnju je upotrebljeno preko dva miliona kamenih blokova prosečne težine oko pet tona. Ne samo za izračunavanje pravilnog geometrijskog oblika piramide, njene orijentacije u pravcu Severnjače, komplikovane unutrašnje arhitekture, nego i za organizaciju tog ogromnog posla, bilo je potrebno veliko matematičko znanje.

### 1.3.2 Matematičko pismo

Stari Egipćani su za pisanje upotrebljavali boje, a za podlogu papirus - osušenu trsku. Pošto se radi o materijalu koji trune i gori, verovatno su mnogi stari spisi tokom vekova uništeni. Veliku štetu naneli su i pljačkaši grobnica i piramida, koji su uništavali sve što nije bilo od plemenitih metala, ili za bilo kakvu upotrebu.

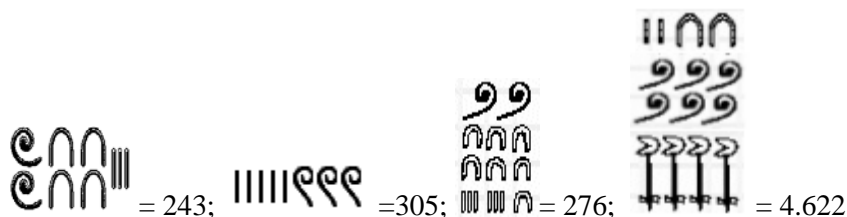
Egipćani su još tri hiljade godina p.n.e. pisali hijeroglifima (slikovnim pismom). Za hijeroglife je dugo važno mišljenje da predstavljaju religiozne oznake. Krajem 18. veka n.e. slučajno je nađena tzv. Ploča od Rozete na kojoj su bili isti tekstovi na grčkom i egipatskom jeziku pisani hijeroglifima. Posle više neuspelih pokušaja da ih dešifruju, tek 1822. godine u tome je uspeo francuski filolog Šampolion.

Za brojeve su imali posebne znake - hijeroglife:

$$| = 1, \curvearrowright = 10, \text{☉} = 100, \text{☪} = 1\,000, \text{☩} = 10\,000, \text{☎} = 100\,000, \text{☎} = 1\,000\,000$$

Jedinica je obeležena jednom linijom ili jednim prstom, deseticu predstavlja potkovicica ili teljig (zajedno s jarmom služi za uprežanje volova), stotina je savijeno uže za merenje zemlje ili uvojak vune iz runa ovce, hiljada je označavana lotosovim cvetom, deset hiljada je prikazano povijenim prstom ili carskim skiptarom (žezlom), za sto hiljada znak je žaba ili punoglavc, a milion je prikazivan božanstvom ili sveštenikom koji se moli bogu.

Iz osnovnih brojeva se vidi, da ovaj brojni sistem ima za bazu broj 10, decimalni brojni sistem, ali nije bio i pozicioni sistem, jer su za svaku deseticu imali drugi znak. Veći brojevi su pisani grupisanjem pojedinih brojeva:



Brojeve su pisali u svim pravcima: sleva udesno (243), zdesna ulevo (305), odozgo nadole (276...) i obratno (4.622).

Sabiranje ovim hijeroglifima bilo je vrlo jednostavno: samo su grupisani isti simboli, deset istih simbola zamenjivali su se sledećim simbolom koji je deset puta veći.

Egipćani su poznavali i razlomke, čak i neke operacije s njima. Razlomke su označavali elipsom, ovalom iznad broja (znak za otvorena usta).

Za najčešće delove jednog celog imali su posebne oznake:

$$\overline{\quad} = \frac{1}{2} \quad \overline{\text{III}} = \frac{1}{3} \quad \overline{\text{II}} = \frac{2}{3} \quad \overline{\text{I}} = \frac{3}{4}$$

Ostale razlomke svodili su na tzv. proste razlomke (u brojiocu 1):

$$\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \overline{\text{III}} \overline{\text{III}} \quad \overline{\text{III}} \overline{\text{III}} \overline{\text{III}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{5}{9}$$

Veštinu u ovom računu vidimo iz primera razlomka  $2/13$  koji su pisali kao:

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104} = \frac{16}{104}$$

### 1.3.3 Matematička saznanja

Najstariji do danas poznati pisani matematički dokument starog Egipta je tzv. „Papyrus Rajnd”, nazvan po škotskom pravniku/arheologu Rajndu (Rhind) koji ga je kupio na pijaci u Luksoru 1858. godine. Papyrus je pronađen u hramu faraona Ramzesa II. Pisan je oko 1650. godine p.n.e. Njegov pisac, neki Amos ili Amozes (Ahmoses) tvrdi da je to prepis dokumenta starog oko dvesta godina, tj. pisanog oko 1850. godine p.n.e.

Papyrus je traka široka 32 cm, dužine 5,5 m. U njemu je dato osamdeset i sedam zadatka sa rešenjima iz raznih oblasti praktične primene.

Množenje su računali udvostručavanjem nekog broja i sabiranjem dobijenih vrednosti, npr.:

$$7*8=1*8+(2*8=16)+(2*2*8=2*16=32)= 8+16+32=56.$$

U 48. zadatku izračunata je vrednost broja  $\Pi$  kao  $(16/9)^2=3,1605$  što je manje od 1% odstupanja u odnosu na današnju vrednost  $\Pi =3,14159\dots$

Nema nikakvih pisanih tragova o načinu i vremenu razvoja ovakve matematike. Jedno je sigurno: do ovog stepena znanja i primene morao je proći viševekovni razvojni put matematike!

U kasnijem periodu, kada se počelo mnogo više pisati na papirusu, razvili su se novi simboli i za brojeve. Tako je nastalo **hieratsko pismo**, kojim se pisalo mnogo kompaktnije nego hijeroglifima, ali je za to bilo potrebno poznavanje velikog broja posebnih znakova.

I njima je mnogo vekova pre Pitagore bio poznat tzv. Pitagorin obrazac  $a^2+b^2=c^2$ , kao i skupine celih brojeva, tzv. Pitagorin tripel (3, 4, 5), koji odgovaraju ovoj formuli.

Posle poplava Nila morali su svake godine premeravati zemlju i utvrđivati čija je neka parcela. Zato su morali posedovati veliko znanje iz geometrije. Računali su površine raznih planimetrijskih oblika: kvadrat, pravougaonik, trougao, trapez, krug. Računali su površine i zapremine raznih geometrijskih tela: kvadar, valjak, polulopta...

Zapreminu zarubljene piramide prikazali su obrascem:  $V=(a^2+ab+b^2)*h/3$ , gde su **a** i **b** stranice osnove i zarubljenog dela, a **h** visina zarubljene piramide.

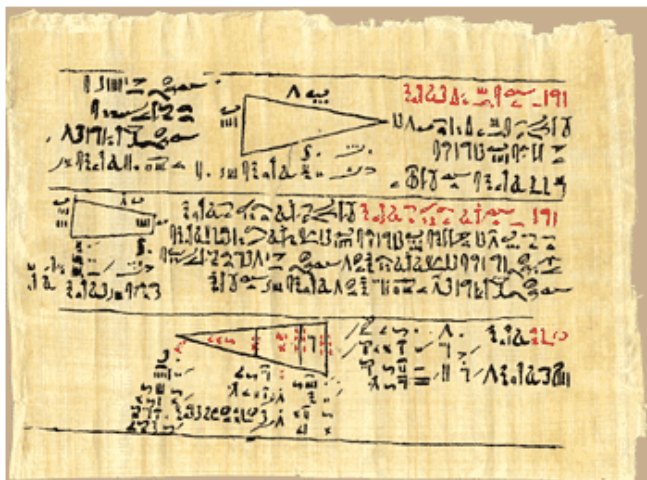
Rešavali su linearne i kvadratne jednačine sa pozitivnim rezultatima.

I Egipćani, kao i Vavilonci, rešavali su samo specijalne praktične zadatke ne baveći se izvođenjem opštih formula i traženjem dokaza i matematičkih zakonitosti.

Matematikom, kao i ostalim naukama, bavili su se samo sveštenici i dvorski pisari. Sveštenstvo je raspolagalo i znanjem iz astronomije i ljubomorno su ga čuvali.

Pored papirusa Rajnd, koji se čuva u muzeju u Londonu, poznati su i tzv. moskovski papirus, koji se čuva u muzeju u Moskvi i tzv. kožna rolna, ukupno desetak matematičkih spisa. Svi ovi spisi potiču iz relativno kratkog perioda, iz 18. i 17. veka p.n.e. i pokazuju zadivljujuće visok stepen tadašnjih matematičkih saznanja u Egiptu.

O razvoju matematike pre i posle toga perioda ne znamo ništa. Nema pronađenih pisanih tragova, ili su uništeni od pljačkaša grobnica.



Isečak iz papirusa Rajnd

Egipćani su koristili kalendar sa 12 meseci od po 30 dana i 5 dana posvećenih glavnim bogovima. Godine 238. p.n.e. uvode jedan dodatni dan za prestupnu godinu svake četvrte godine. Skoro dvesta godina kasnije sličan kalendar sa prestupnom godinom uvodi i Julije Cezar u Rimsko carstvo, koji se po njemu i danas naziva Julijanski kalendar. (Videti priču o kalendaru).



Nepoznata dostignuća Starog Egipta: Jedan reljef u objektima Keopsove piramide neodoljivo podseća na ogromnu električnu sijalicu!?

## 1.4 Matematika u Indiji

### 1.4.1 Matematičko pismo

Indijci ili Indusi su tokom vekova koristili više brojnih sistema. Najstariji je **kharosthi**, decimalni brojni sistem, koji u sebi ima i bazu četiri i razvio se oko 400. godine p.n.e. da bi bio u upotrebi do 2. veka n.e.

1	2	3	4	5	6	8	10
			×	×	×	××	?
3	???	???	????	?	?	?	?
20	50	60	70	100	200		

Kasnije, u 3. veku p.n.e., razvio se sistem **brahmi**, koji se smatra pretečom **gvaliora**, iz koga potiče naš današnji decimalni indoarapski brojni sistem:

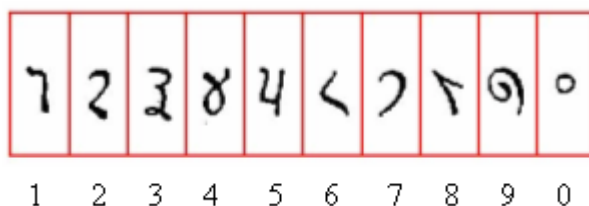
—	=	≡	∩	∩	∩	∩	∩	∩
1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	o	∩	×	∩	∩	∩	∩	∩
10	20	30	40	50	60	70	80	90
∩	∩	∩	∩	∩	∩	∩	∩	∩
100	200	500	1000	4000	70.000			

Ovaj brojni sistem se piše sleva udesno, ima izražene oznake za brojeve od 1 do 9, ali i posebne znake za desetice, stotice, hiljade... još uvek nije pozicioni sistem.

Dokazano je da je u Indiji bilo u upotrebi i drugih brojnih sistema; npr. brojevi se označavaju rečima i to tako da se 1 označava samo nečim što je jedno (Zemlja, Mesec); 2 se označava rečima koje označavaju parove (oči, ruke)...



Sretna okolnost da su imali izražene oznake za brojeve od 1 do 9 i da su došli u dodir sa mesopotamijskom nulom, koja se tamo upotrebljavala od polovine poslednjeg milenijuma stare ere, navela je i Indijce na čist decimalni pozicioni sistem, koji se kod njih pojavio već u 4. veku n.e.



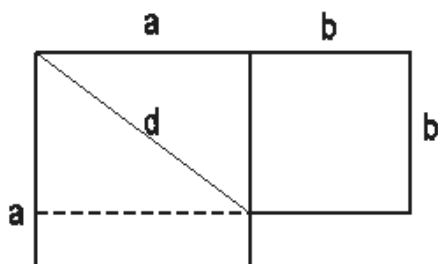
Prva nula, pisana kao kružić (prazno) nađena je na zapisu na zidu manastira kod gradića Gvaliora iz 870. godine n.e., pa se po tome i zove Gvalior pismo.

Ovo pismo u 8. veku preuzimaju i Arapi i preko njih dolazi i u Evropu od 15. odnosno 16. veka.

Nula je na početku obeležavana tačkom, a kasnije kružićem što je predstavljalo prazninu. Prazno se arapski kaže „sifr”, odakle izgovorom dolazi reč „cifra”, prvo za nulu, a kasnije i za sve ostale tzv. arapske brojeve. I francuska reč zero=nula vodi poreklo od sifr.

### 1.4.2 Matematička saznanja

Od Indijaca, takođe, nije ostalo mnogo matematičkog materijala zato što su pisali na osušanim palminim listovima i prerađenoj trsci.



Najstariji matematički dokument potiče iz 8. veka p.n.e. To je tzv. *Sulva-sutra* ili pravila užeta (sulva=uže, konopac; sutra=pravilo). Ovaj spis predstavlja skup pravila i uputstava hinduističkim sveštenicima za izradu žrtvenih oltara.

Tu je, između ostalog, dat i Pitagorin obrazac u sledećem obliku: ako se želi napraviti kvadrat čija je površina jednaka zbiru dva poznata kvadrata, onda treba na stranicu jednog kvadrata naneti stranicu drugog, tako da na

onom prvom odseca jednu traku. Uže koje se postavi dijagonalno preko preostale trake je stranica sabranog kvadrata:

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

I oni su znali više parova tzv. Pitagorinog tripela-skupovi od tri broja koji zadovoljavaju Pitagorinu teoremu, kao npr.: 5, 12, 13...

Bili su dobri astronomi. Još u 5. veku p.n.e. izračunali su da je vreme obilaska Zemlje oko Sunca 365 dana, 6 sati, 12 minuta i 36 sekundi-nepunih 24 min. više od danas poznatog tačnog vremena! Imali su kalendar sa 12 meseci po 30 dana i prestupnom godinom.



Brahmagupta

Indijci su računali pomoću sandučića s peskom po kome su pisali brojeve štapićima. Za raspoznavanje decimalnih mesta (jedinice, desetice...) povlačili su vertikalne linije u pesku ili razapinjali vertikalne kanape.

Nagli razvoj indijske matematike dolazi od petog veka n.e. Najpoznatiji matematičar iz tog doba je Brahmagupta koji je živio u 7. veku n.e. On je dao teoriju nule (definisao računске operacije s nulom) i uveo negativne brojeve. Početkom 10. veka definisali su sinus i kosinus u sva četiri kvadranta. Bhaskara II u 12. veku n.e. piše do tada najpoznatije matematičko delo „Venac znanja” u kome obrađuje aritmetiku, geometriju, algebru i astronomiju. On analizira pozitivna rešenja kvadratne jednačine i zaključuje da se iz negativnog broja ne može izvući kvadratni koren. Računao je i jednačine trećeg stepena s pozitivnim rešenjima. Daje vrednost sinusa za cele stepene.

Za broj  $\pi$  upotrebljavali su različite vrednosti:  $27/8$  (=3,375);  $243/80$  (=3,037);  $19/6$  (=3,167).

U drugom, centralnom delu ove knjige biće govora o staroindijskom načinu računanja, o tzv. **matematičari veda**. Veda je u staroindijskom sanskritu značila nešto kao „sveukupno znanje o prirodi”. Saznanja veda nisu se smela

zapisivati, prenosila su se usmenim putem s kolena na koleno, i to samo najboljim učenicima.

Neki smatraju da je matematika veda najstarija matematika uopšte. Zapisivanje ovih matematičkih metoda počelo je tek od 5. veka n.e.

Indijski matematičar Sri Bharati Krsna (1884 -1960), proučavao je od 1911. do 1918. god. vedsku matematiku. Posle toga je postao kaluđer i bavio se jogom. Nakon njegove smrti pronađeni su spisi o vedskoj matematici i objavljeni 1965. godine u knjizi „Vedic Mathematics or sixteen simple mathematical formulae from Vedas”. Tamo stoji da je ova knjiga trebala da bude samo uvod u vedsku matematiku. Nažalost, ona je bila i jedina. Knjiga je doživela mnoga izdanja i u poslednje vreme se sve više citira. Vedaska matematika bazira na 16 pravila (sutre) i 13 potpravila (podsutre). I pored računara i kompjutera ove metode skraćenog, brzog računanja po matematici veda sve se više proučavaju ne samo u Indiji nego i u SAD, Nemačkoj, Engleskoj, Kanadi, kao i mnogim drugim zemljama.

Povezanost filozofije i matematike najbolje je izražena u „filozofskoj” definiciji četiri osnovne matematičke operacije:

- + sabiraj (okupljaj) dobre prijatelje,
- oduzimaj (umanjuj) loše osobine,
- x množi (umnožavaj) sopstvene sposobnosti,
- : deli (podeli) posao.

O vedskoj matematici najbolje govori podnaslov jedne nemačke knjige: *Genijalno jednostavno – jednostavno genijalno!*

Jedna od sanskritskih priča kaže, da su prvi brojevi nastali tako što su uglasto pisani znakovi i brojem uglova prikazivali brojeve. Broj 1 ima samo jedan ugao, između kose i vertikalne crtice, broj 2 je pisan kao latinično Z i ima dva ugla...

U datoj skici svaki ugao označen je jednom tačkom, nula nema uglova:



Brzim pisanjem došlo je kasnije do zaobljavanja brojeva.